

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПОДЗЕМНЫХ ОБОЛОЧЕК В ПОДАТЛИВЫХ ИНЕРЦИОННЫХ СРЕДАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК

Владимир Львовский

Автор работы поставил целью выяснить, почему произошли несчастные случаи в подземных тоннелях Бостона (Big Dig). Для исследования были использованы методы геотехнической и строительной механики. С помощью законов механики и математики были получены математические модели поведения горных пород (грунтовых массивов) и подземных сооружений при действии различных динамических и статических нагрузок.

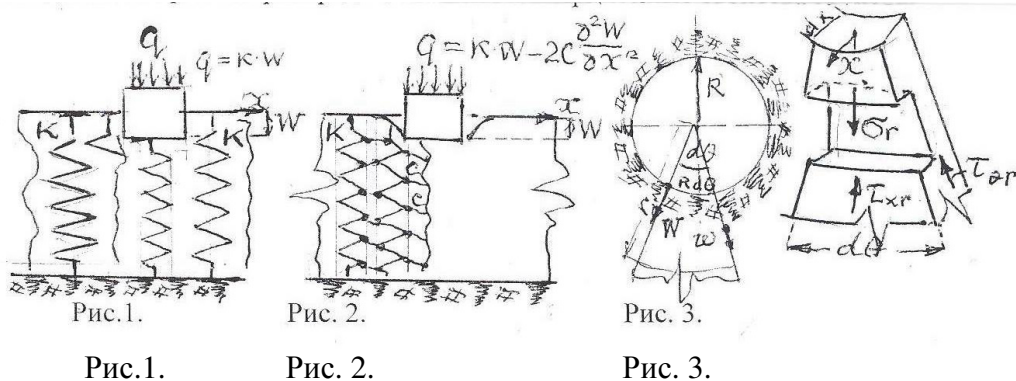
Модели уточняют результаты расчетов, существовавших ранее, и позволяют повысить надежность работы подземных сооружений.

1. Новые математические модели колебаний грунтовых массивов

1.1. Краткий обзор существующих моделей грунтовых массивов

Для возведения инженерных сооружений в качестве оснований используются различные горные породы, называемые грунтами. Поэтому модели оснований, отражающие характер работы грунтов под нагрузкой, строятся на законах строительной механики и теории упругости. Такие абстрактные схемы для исследования природных явлений с помощью законов механики называют моделями оснований. Уравнения, описывающие эти модели, называются математическими моделями грунтовых массивов и оснований.

В течение длительного времени единственной расчётной моделью грунтов была Винклерова модель, представляющая собой систему не связанных между собой упругих пружин, закреплённых на жёстком слое (рис. 1). Штамп, давящий на поверхность этого основания, вдавливается на некоторую величину w , пропорциональную среднему давлению q , только под штампом. Математическая модель этого основания имеет вид $q = k w$. Коэффициент k называется коэффициентом постели Винклерова основания, размерность Н/м^3 . Модель не отражала распределительных и инерционных свойств грунтов.



После 1930 года в качестве расчётной модели грунтов была принята модель упругого пространства, отражающая инертность и распределительные свойства реальных грунтов.

Математическая модель выражается уравнениями Лямэ теории упругости. Модель, сложная в математическом отношении, была принята без экспериментальной проверки. В 60-х годах эксперименты показали, что модель сильно преувеличивает влияние распределительной способности и инерционности на динамические процессы. Появилась потребность изыскания новых расчётных моделей грунтов.

М.М. Филоненко-Бородич и П.Л. Пастернак [1] предложили расчётные модели оснований, в которых реактивное давление представляет линейную функцию прогиба и поворота поверхности основания (рис.2):

$$q = k w - 2c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где k – характеристика работы основания на сжатие,
 c – характеристика работы основания на сдвиг.

Модель распределяет нагрузку, но не учитывает инерционности основания. Она применима для решения статических задач.

В.З. Власов [2] предложил техническую теорию расчёта конструкций на упругом основании, обладающем распределением и инерционностью на основе формулы реактивного давления

$$q = -2c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где c , k , m_0 – характеристики работы на сдвиг, сжатие, а также инерционности основания, определяемые через заданную функцию $\phi(z)$ распределения перемещений по глубине основания (рис.2).

1.2. Разработанная автором стержневая модель упруго-вязкого инерционного основания с подземной цилиндрической полостью

Моделируем основание упруго-вязкими трапецеидальными стержнями, помещёнными в упруго-вязкую среду, работающую только на сдвиг (рис.3). Радиальные перемещения поверхности полости обозначим $W=W(x,s,t)$. Перемещения точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси полости, обозначим $w = w(x,r,\theta,t)$. Эти перемещения выразим через перемещения поверхности полости следующим образом

$$w(x,r,\theta,t) = W(x,s,t)\phi(r), \quad s = r\theta, \quad (3)$$

где $\phi(r)$ – функция изменения перемещений в радиальных направлениях. Эта функция зависит от вида воздействия нагрузки на поверхность полости и должна удовлетворять условиям $\phi(R) = 1$, $\phi(\infty) = 0$.

r – радиальная координата; s – дуговая координата.

Напряжения в поперечных сечениях трапецеидального стержня и среды, вязких по закону Фойхта, т.е. пропорциональные скорости деформаций, равны

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu_0^2} (\xi_r + \mu_0 \xi_r^i), \quad \tau_{\theta r} = G_c (\gamma_{\theta r} + \mu_1 \gamma_{\theta r}^i), \quad \tau_{xr} = G_c (\gamma_{xr} + \mu_1 \gamma_{xr}^i) \quad (4)$$

где E , ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона стержней, G_c – модуль сдвига среды, ξ_r – радиальная деформация,

$\gamma_{\theta r}$ и γ_{xr} – деформации сдвига,

μ_0 и μ_1 – коэффициенты вязкости стержней и среды. Выражая деформации через перемещения точек основания $w(x,r,\theta,t)$, получаем:

$$\xi_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \gamma_{xr} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

Подставляя формулы (5) в выражения (4) с учётом формул (3), имеем:

$$\sigma_r = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} (W + \mu_0 \frac{\partial W}{\partial t}) \psi'(r), \quad \tau_{\theta r} = \frac{G_e}{r} (\frac{\partial W}{\partial \theta} + \mu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial t}) \psi(r), \quad \tau_{xr} = G_e (\frac{\partial W}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial t}) \psi(r). \quad (6)$$

Применим к выделённому элементу по рис.3 принцип Даламбера-Лагранжа: сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях равна нулю, – получим после сложных преобразований следующее уравнение динамической математической модели основания, т.е. уравнение грунтового массива с цилиндрической полостью при действии всех статических и динамических (подвижных) нагрузок.

Используя оператор Лапласа, получаем уравнение :

$$-2(c_0 + f_1 \frac{\partial}{\partial t}) \nabla^2 W + (k_0 + \frac{\partial}{\partial t} f_0 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} m_0) W = q(x, s, t), \quad (7)$$

где характеристики основания c_0, k_0, f_0, f_1, m_0 определяются по формулам:

$$2c_0 = G_c \int_R^\infty \psi^2(r) \frac{r}{R} dr, \quad k_0 = \int_R^\infty (\psi'(r))^2 \frac{r}{R} dr, \quad f_0 = k_0 \mu_0, \quad 2f_1 = G_c \mu_1 \int_R^\infty \psi^2(r) \frac{r}{R} dr \quad (8)$$

$$m_0 = \rho_0 \int_R^\infty \psi^2(r) \frac{r}{R} dr. \quad \nabla^2 = (\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}) \quad \text{- оператор Лапласа}$$

Математическая модель колебаний обобщённого упруго-вязкого грунтового массива с цилиндрической горизонтальной, вертикальной или наклонной полостью содержит 5 характеристик: c_0 - характеристика работы основания на сдвиг, k_0 - работы на сжатие, f_0 - характеристика вязкости при сжатии, f_1 - характеристика вязкости при сдвиге, m_0 – характеристика инерционности или приведенная масса грунта, участвующая в колебаниях.

Рассматривая частные случаи общего уравнения (7), когда некоторые характеристики принимаются равными нулю., то есть данное свойство грунтов не учитывается, получаем 5 математических моделей грунтов. Если k_0 не равно нулю, а остальные равны нулю, получаем модель Винклера; если c_0 и k_0 не равны нулю, получаем статическую модель Филоненко-Бородича и т.д.

Предложенная модель является весьма гибкой и универсальной.

2. Математические модели колебаний оболочек в полости грунтового массива

Колебания цилиндрических оболочек описываются при помощи:

- а) 3-х дифференциальных уравнений Лямэ теории упругости;
- б) 3-х уравнений теории оболочек, учитывающих сдвиг и инерцию вращения (оболочки типа Тимошенко);
- в) 2-х уравнений тонких оболочек, подчиняющихся гипотезе Кирхгофа-Лява (гипотезе прямой нормали) при асимметричных нагрузках [3,4,5]. Дифференциальные уравнения (а) очень сложны и в данной работе не применяются. Они использованы в работе [3]. Дифференциальные уравнения (б) применены в работе [4]. В данной работе применены уравнения (в) для симметричных колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек, модель которых описывается одним уравнением:

$$\frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} + 4\beta^4(w-w_0) + \frac{m}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p_1 - p_c}{D}; \quad (9)$$

$$\beta^4 = 3(1-\nu^2)/R^2 h^2, D = Eh^3/12(1-\nu^2),$$

где w - радиальные прогибы оболочки, w_0 - начальные прогибы,
 x - продольная ось оболочки, D - цилиндрическая жесткость, $m = \rho h l$ - погонная масса, ν - коэффициент поперечной деформации Пуассона,
 E - модуль упругости материала оболочки, R - наружный радиус оболочки,
 p_1 - внутреннее давление,
 p_c - радиальная реакция грунтового массива, h - толщина оболочки.

Это уравнение используется для исследования колебаний оболочки и массива подземных нефте - водо - газопроводов.

Для исследования колебаний оболочек и грунта в метрополитене и в шахтных выработках при действии подвижных нагрузок применяется модель тубинговых оболочек с прямоугольными тубингами [5]:

$$E_1 h_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_1 R^2 \frac{\partial^6 w}{\partial s^4 \partial t^2} = R^2 \frac{\partial^4 (p_r - p_c)}{\partial s^4}, \quad (10)$$

где все величины имеют те же значения, что и в формуле (9).

3. Осесимметричные колебания оболочки (9) в упруго-вязкой среде при действии подвижных нагрузок

3.1. Колебания оболочки при движении кольцевой нагрузки

Дифференциальное уравнение упруго-вязкой инерционной среды с цилиндрической полостью при осесимметричной нагрузке получаем из (7) при условиях:

$$\partial^2 W / \partial s^2 = 0, \quad f_1 = 0.$$

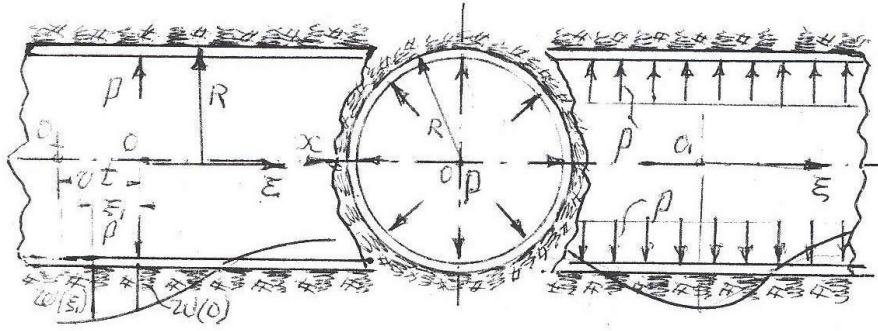
$$2c_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_0 W + f_0 \frac{\partial W}{\partial t} + m_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = p_c(x, t), \quad (11)$$

где W - радиальные перемещения точек полости грунтового массива.

Подставляя p_c из (11) в уравнение (9), получаем математическую модель колебаний оболочки в полости грунта. При двухсторонних связях $W=w$ имеем:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2\bar{r}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{s}^4 w + \bar{f} \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p}{D}, \quad \bar{r}^2 = \frac{c_0}{D}, \quad \bar{s}^4 = \frac{k_0}{D} + 4\beta^4, \quad \bar{m} = \frac{(m_0 + m_{ob})}{D}. \quad (12)$$

Для исследования колебаний кольцевой сосредоточенной нагрузки при равномерном движении переходим к подвижной системе координат (рис.4).



при сосредоточенной нагрузке

при распределенной нагрузке

Рис. 4

Рис. 5

Связь между координатами x и ξ имеет вид: $\xi = x - vt$, v – скорость.

Определяем производные, входящие в (12) в подвижной системе координат:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{d\xi}, \quad \frac{\partial^n w}{\partial x^n} = \frac{d^n w}{d\xi^n}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -v \frac{dw}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} \quad (13)$$

С учётом (13), уравнение (12) принимает вид однородного уравнения в связи с тем, что сосредоточенную нагрузку учитываем при условиях:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - 2(\bar{r}^2 - \frac{mv^2}{2}) \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \bar{f}v \frac{dw}{d\xi} + \bar{s}^4 w = 0 \quad (14)$$

Решение (14) должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$w_+(0) = w_-(0), \quad w_+(\infty) = w_-(\infty) = 0, \quad w'_+(0) = w'_-(0), \quad w''_+(0) - w''_-(0) = p/D. \quad (15)$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (14) имеет вид:

$$\lambda^4 - 2(\bar{r}^2 - mv^2/2)\lambda^2 - \bar{f}v\lambda + \bar{s}^4 = 0 \quad (16)$$

Поскольку коэффициент при λ^3 равен нулю, сумма корней равна нулю. Все корни должны быть комплексными, попарно-сопряженными, с разными по знаку действительными частями:

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1, \quad \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2, \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$$

Представив уравнение (16) в виде произведения 4-х сомножителей, раскрыв скобки и, приравняв коэффициенты с коэффициентами (16), определяем α, β_1, β_2 .

Общее решение дифференциального уравнения (14) имеет вид:

$$w(\xi) = e^{-\alpha\xi} (A_1 \cos \beta_2 \xi + B_1 \sin \beta_2 \xi) + e^{\alpha\xi} (A_2 \cos \beta_1 \xi + B_2 \sin \beta_1 \xi) \quad (17)$$

Для $\xi > 0$: $w_+(\xi)$ равно первому слагаемому (17), для $\xi < 0$: $w_-(\xi)$ – второму.

В соответствии с граничными условиями (15) получаем A_1, B_1, A_2, B_2 , и прогиб под нагрузкой из условия $w''_+(0) - w''_-(0) = P/D$. $w_+(0) = A_1, w_-(0) = A_2, A_1 = A_2 = w(0)$.

Опуская сложные преобразования при нахождении третьих производных, приведем конечный результат для прогиба оболочки под грузом:

$$w(\xi = 0) = \frac{P}{EI[8\alpha^3 + 4(mv^2/2 - \bar{r}^2) + (\bar{f}v/4\alpha)^2/\alpha]} = \frac{P}{H}, \quad (18)$$

где H - жёсткость.

Если горный массив упругий, т.е. $f = 0$, то $\alpha = \sqrt{(\bar{s}^2 + \bar{r}^2)}/2$.

Прогиб оболочки представлен на рис.4. Наибольший прогиб находится за движущейся нагрузкой на расстоянии ξ_1 , которое находится исследованием (17) на максимум.

При движении бесконечной равномерно распределённой нагрузки по длинной оболочке (рис.5) прогиб в начале подвижной системы координат:

$$w_p(0) = \int_{-\infty}^0 p w_-(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} p w_+(\xi) d\xi = p/k, \quad (19)$$

где k - характеристика грунта на сжатие.

В этом случае грунтовой массив ведет себя как Винклерово основание.

3.2. Математическая модель колебаний балки в тубинговой оболочке в полости грунта, под действием подвижных нагрузок

Моделируем подземные сооружения метрополитена и капитальных шахтных выработок балкой в тубинговой оболочке, уложенной в полости грунтового массива. Связи между балкой (рельсами) и оболочкой, оболочкой и грунтом считаем двухсторонними скользящими [5]. Математическая модель колебаний упруго-вязкой среды представлена формулой (7), характеристики приведены в (8). Уравнение (19) является математической моделью тубинговой оболочки из прямоугольных тубингов, уложенной в полости массива (7).

Уравнение колебаний балки в оболочке имеет вид

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p - p_n \quad (20)$$

При двухсторонних связях прогибы w балки, оболочки и среды под нагрузкой одинаковы. Дифференцируя (7) четыре раза по дуговой координате s и подставляя полученное значение $\partial^4 p_c / \partial s^4$ в уравнение (10), получаем:

$$E_1 h_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_1 R^2 \frac{\partial^6 w}{\partial s^4 \partial t^2} + [-2c_0 (\frac{\partial^6 w}{\partial s^4 \partial x^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial s^6}) + k_0 \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + f_0 \frac{\partial^5 w}{\partial s^4 \partial t} + m_0 \frac{\partial^6 w}{\partial s^4 \partial t^2}] = R^2 \frac{\partial^4 p_n}{\partial s^4}. \quad (21)$$

Продифференцируем уравнение (20) 4 раза по дуговой координате:

$$E_2 I_2 \frac{\partial^8 w}{\partial s^4 \partial x^4} + m_2 \frac{\partial^6 w}{\partial s^4 \partial t^2} = \frac{\partial^4 p}{\partial s^4} - \frac{\partial^4 p_n}{\partial s^4}. \quad (22)$$

Подставляя $\partial^4 p_n / \partial s^4$ из (21) в уравнение (22), получаем искомую математическую модель:

$$E_2 I_2 \frac{\partial^8 w}{\partial s^4 \partial x^4} + \frac{E_1 h_1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_{sum} \frac{\partial^6 w}{\partial s^4 \partial t^2} - 2c_0 (\frac{\partial^6 w}{\partial s^4 \partial x^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial s^6}) + k_0 \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - f_0 \frac{\partial^5 w}{\partial s^4 \partial t} = \frac{\partial^4 p}{\partial s^4}. \quad (23)$$

где $m_{sum} = m_0 + m_1 + m_2$.

Для решения уравнения (23) применяем алгоритм Бубнова-Галеркина [5]. Представим прогибы оболочки и балки в виде произведения двух функций

$$w(x, s, t) = W(x, t)\varphi(s), \quad (24)$$

где $W(x, t)$ – функция прогибов оболочки и балки при $s=0$, $\varphi(s)$ – функция прогибов по дуге оболочки. На основании экспериментальных исследований (на модели тубинговой оболочки, уложенной в полости податливой среды, при действии вертикальной нагрузки на балку) и теоретических исследований найден закон изменения функции

$$\varphi(s) = \exp(-\eta s) \quad (25)$$

Подставляя (24) в уравнение (23) и умножив обе части на $\varphi(s)$, получаем:

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \frac{\partial^4 \varphi(s)}{\partial s^4} + \frac{E_1 h_1}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \varphi(s) + m_{sum} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \frac{\partial^4 \varphi(s)}{\partial s^4} - 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^4 \varphi(s)}{\partial s^4} + W \frac{\partial^6 \varphi(s)}{\partial s^6} \right) + k_0 W \frac{\partial^4 \varphi(s)}{\partial s^4} + f_0 \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial^4 \varphi(s)}{\partial s^4} = P \frac{\partial^4 \varphi(s)}{\partial s^4} \quad (26)$$

Интегрируя уравнение (26) в пределах от $-\pi R$ до $+\pi R$ с учётом (25) и переходя к подвижной системе координат $\xi = x - vt$, получаем уравнение:

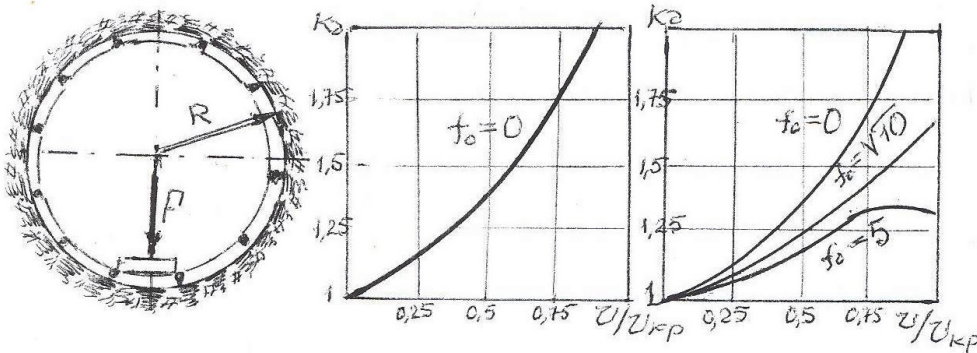
$$\left(E_2 I_2 \eta^3 + \frac{E_1 h_1}{R^2 \eta} \right) \frac{d^4 W}{d\xi^4} + m_{sum} \eta^3 v^2 \frac{d^2 W}{d\xi^2} - 2 c_0 \eta^3 \left(\frac{d^2 W}{d\xi^2} + W \eta^2 \right) + k_0 \eta^3 W - f_0 \eta^3 v \frac{dW}{d\xi} = P \eta^3 \quad (27)$$

Введя обозначения, получим уравнение (27) в виде:

$$\left(E_2 I_2 \eta^3 + \frac{E_1 h_1}{R^2 \eta} \right) = D, \quad 2 c_0 \eta^3 / D = 2 \bar{r}^2, \quad \frac{k_0 \eta^3 - 2 c_0 \eta^5}{D} = \bar{s}^4, \quad \frac{m_s \eta^3}{D} = \bar{m}_s, \quad \frac{f_0 \eta^3}{D} = \bar{f}_0, \quad \frac{P \eta^3}{D} = \bar{P},$$

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} - 2(\bar{r}^2 - \frac{\bar{m}_s v^2}{2}) \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \bar{s}^4 W - \bar{f}_0 v \frac{dW}{d\xi} = \bar{P} \quad (28)$$

Уравнение (28) по форме совпадает с уравнением (14), поэтому исследование движений сосредоточенной и равномерно распределенной сил определяется в общем виде по формулам (17, 18 и 19) при других величинах характеристик системы. На рис 6а, 6б, 6с представлена схема тубинговой оболочки в грунте, графики изменения динамического коэффициента, равного отношению динамических прогибов при разных скоростях движения к статическим прогибам, при нулевом коэффициенте вязкости и не нулевых коэффициентах.



6, а

6, б

6, с

Рис. 6

Выводы

1. Предложена новая математическая модель упруго-вязкого инерционного основания с подземной цилиндрической полостью, позволяющая решать задачи расчета несущих конструкций тоннелей.
2. Получены математические модели оболочек, уложенных в полости грунтового массива, позволяющие решать задачи подземного транспортирования нефти, газа, пара и воды.
3. Решена задача динамического воздействия подвижных нагрузок в тубинговой оболочке. Приведены графики результатов изменения динамических коэффициентов в зависимости от скорости при различных коэффициентах вязкости. Полученные коэффициенты проверены экспериментально.
4. Данные модели могут быть использованы для расчета колебаний и прочности тоннелей, имеющих оболочки.
5. Модели существенно уточняют результаты расчетов и позволяют повысить надежность работы подземных сооружений.

Источники

1. Филоненко-Бородич М.М. Модель упругого основания, способного распределять нагрузку. – М: Сб. трудов МЭМИИТ №53. – 1945.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ГИФМЛ. – 1960.
3. Львовский В.М., Пожуев В.И., Онищенко В.И. Сборник трудов ДГУ «Вопросы прочности и пластичности». – Днепропетровск: ДГУ. – 1974.
4. Львовский В.М. Колебания горных тележек на инерционном пути. – Изв. Вузов. Горный журнал . – 1977, № 5.
5. Львовский В.М. Расчёт подземных цилиндрических сооружений на действие подвижных нагрузок. – Ленинград: Труды VI Всесоюзной конференции по ДОФПС. – 1985.